Шифр: В-20

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Всеволожский

Школа МОУ „СОШ №2" г. Всеволожска

Класс 10

ФИО Маркелова
Анастасия Махмудовна

B-20

1	2	3	4	5	Σ
~~2~~	0	0.	X	0.	~~7~~

7 исправлено

№1. Для начала ~~изо~~ разберем 1 ситуацию:

человек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
число	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10

Видно, что, если все говорят правду, числа >1.
Из второго случая понятно, что рыцарями не могут быть все, т.к. один из людей сказал: „мое число <1". Т.о. max кол-во рыцарей <10.

Тогда допустим следующую ситуацию, что все остальные сказали правду, для этого нужно, чтобы они говорили так (например):

человек	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
число I	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
число II	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1

Очевидно, при другой расстановке количество интервалов уменьшится*

(1;2) (2;3) (3;4) (4;5) (5;6) (6;7) (7;8) (8;9) (9;10) ? (9 интервалов)

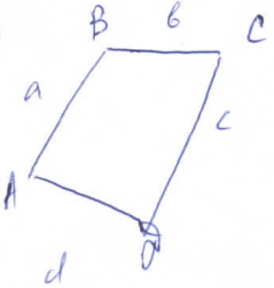
Т.е. число 1го лежит на промежутке (1;2), второго – (2;3) и т.д. По условию числа не обязательно целые.

* Если, допустим, интервалы распределить как (1;3) (2;4) ... (8;10), их станет 8, а 2 человека скажут, что их число $x_1<1$, $x_1>9$ и $x_2<2$, $x_2>10$, т.е. N лжецов увеличится.

Значит, среди 10 человек 9 могут быть рыцарями, а 1 – лжец (его число лежит на [1;10

Ответ: 9 рыцарей.

№2



Дано: ABCD – выпуклый четырехугольник

$P_{ABCD} = 10^{100}$ $\quad AB, BC, CD, AD \in N$

$AB+BC+CD \vdots AD$

$AB+CD+AD \vdots BC$

$AB+BC+AD \vdots CD$

$AD+BC+CD \vdots AB$

Д-ть: $AB=BC=CD=AD$

Д-во: пусть $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$ (для быстрого записи)

$\boxed{P=a+b+c+d}$ Тогда $P-a \vdots a \Rightarrow \frac{P-a}{a} \in Z \Rightarrow \frac{P}{a}-1 \in Z \Rightarrow \frac{P}{a} \in Z$

т.е. $P \vdots a$

аналогично $P \vdots b$; $P \vdots c$; $P \vdots d$

Представим a, b, c, d в виде простых множителей:

$a = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$

$b = q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l}$

$c = x_1^{\varphi_1} \cdots x_R^{\varphi_R}$

$d = y_1^{\alpha_1} \cdots y_s^{\alpha_s}$

~~1. $a+b+c+d \vdots a$ 2. $a+b+c+d \vdots b$ 3. $a+b+c+d \vdots c$ 4. $a+b+c+d \vdots d$~~

~~Рассмотрим 1 случай (Пусть $a<b<c<d$, числа не равны друг другу)~~

~~$p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k} + q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l} + x_1^{\varphi_1} \cdots x_R^{\varphi_R} + y_1^{\alpha_1} \cdots y_s^{\alpha_s} \vdots p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$~~

~~Значит, можно вынести из каждого числа $p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$, и $b' \neq 1$ $c' \neq 1$ $d' \neq 1$~~

~~и при этом $b'>1$ $c'>1$ $d'>1$~~

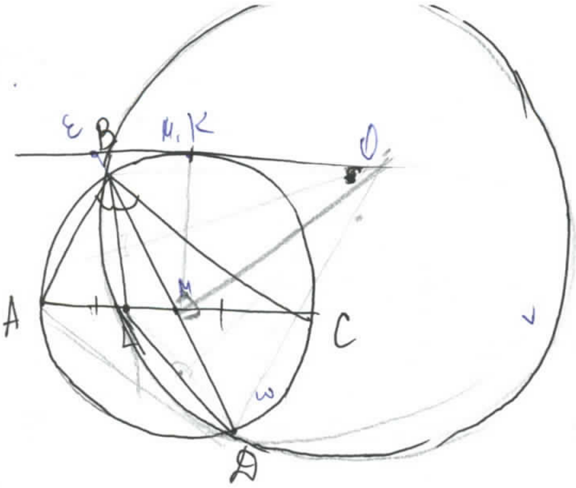
~~и при этом $b'<c'<d'$~~

Т.к. $P \vdots a$ $P \vdots b$ $P \vdots c$ и $P \vdots d$, P содержит все множители этих чисел. То есть, если все наборы простых множителей различны (числа тоже различны, очевидно), $P = a \cdot b \cdot c \cdot d$, но $P = a+b+c+d$

Т.е. $a=b=c=d=1$, а $P \neq 4$. Значит, множители этих чисел повторяются. В таком случае, сократим b, c, d на a, $c\, d$ на b и c, чтобы получить наборы неповторяющихся простых множителей (где числа все ещё должны быть различны). Тогда $P = a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' = a'+b'+c'+d'$, откуда мы получаем, что $a'=b'=c'=d'=1$, а значит, все наборы простых множителей одинаковы, т.е. $a=b=c=d$.

ч.т.д.

№4.



Дано: $\triangle ABC$

$AB \neq BC \neq AC$

BL – биссектриса

BM – медиана $BM \cap \omega = D$

ω – описанная окр. около ABC.

v – опис. окр. около BDL (O, R)

$OK \parallel AC$

Д-ть: OK – касательная

Д-во: 1. рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Он вписан, т.е. суммы противоположных углов $= 180°$. При этом диагональ AC делится другой диагональю пополам, ~~значит, ABCD – параллелограмм~~, плюс из равенства $\triangle ABM$ и $\triangle MCD$ по II признаку ($\angle AMB = \angle CMD$ (верт.) $AM = MC$ по условию $\angle ACD = \angle ABD = \smile AD$ из окружности) $BM = MD$, т.о. $ABCD$ – параллелограмм,

а т.к. в парал. противоположные углы равны, $\angle ABC = \angle ADC = \angle BCD = \angle BAD = 90$

т.е. $ABCD$ – прямоугольник. Т.к. $\angle ABC = 90°$ и опирается на $\smile AC$, AC – диаметр

т.е. $AM = MC = r_\omega$ (радиус ω) Т.к. $\triangle ABC$ прямоугольный, $BM = AM = r_\omega$ $BM = MD$ (пар.)

Т.о. если $MK = AM$, то OK – касательная.

где K – точка касания, если таковая имеется

2. M – середина BD, значит, серед. перпендикуляр пройдет через точку M и O – центр опис. окружности v $\triangle BDL$

Продлим MB до пересечения с OK $MB \cap OK = \varepsilon$.

рассмотрим $\triangle OM\varepsilon$. $OM \perp BD$ (сер. перп.), значит, $\triangle OM\varepsilon$ – прямоуг. $\angle OM\varepsilon = 90°$

проведем перпендикуляр от AC к OK через точку M. MN_1 ... ($AC \parallel OK$, значит $MN_1 \perp AC \perp O$)

в этом случае $\angle MN_1O = 90°$

$\angle O$ – общий с $\triangle OM\varepsilon$ $\Rightarrow \triangle OM\varepsilon \sim \triangle MN_1O$ $\frac{O\varepsilon}{OM} = \frac{OM}{ON_1}$ $OM^2 = O\varepsilon \cdot ON_1 = MN_1^2 + ON_1^2$

~~Т.к. $OK \parallel AC$ и $N_1 \in OK$: $\angle OMC = \angle N_1OM$ (накрест лежащие при сек. OM)~~

~~$\angle AMO = 180 - \angle OMC$ (смежные)~~

~~$\angle N_1MO = 180 - 90 - \angle OMC = 90°$~~

$O\varepsilon = ON_1 + \frac{MN_1^2}{ON_1}$

$\varepsilon N_1 = \frac{MN_1^2}{ON_1}$

$\frac{MN_1^4}{ON_1^2} = M\varepsilon^2 - MN_1^2$

$MN_1^2 \left(\frac{MN_1^2}{ON_1^2} - 1\right) = M\varepsilon^2$

№3. Сумма 2х иррациональных чисел рациональна, если они противоположны, т.е. сумма = 0. В-20.

Значит, в строке должно находиться n-ое кол-во пар иррациональных противоположных чисел, т.е. четное их число. Обозначим его α (число ирр чисел)

$\alpha_{max} = \cancel{1009}$ 2018, в таком случае в 1 строке 2018 ирр. чисел, тогда для выполнения условия необходимо расставить их во второй строке так, чтобы каждое $a_{i_1} = -a_{i_2}$, где a - число, i - номер в строке, 1 или 2 - номер строки.

В этом случае в обеих строках останется свободным 1 рац. число, т.е. окажется, что $a_{i_1} = a_{i_2}$, а по условию это невозможно (запрещено).

Тогда в строке должно находится хотя бы 2 рац. числа, но тогда $\alpha \not\vdots\, 2$, значит, нужно кол-во рац. чисел (β), равное минимальному целому числу, большему 2х. Тогда $\beta = 3$. Значит $\alpha = 2016$, $\alpha \vdots 2$.

В этом случае α сумм, равных 0; и 3 суммы рациональных чисел.

Приведем модель решения:
(a, b, c, d ирр. числа)

	1	2	3		i	i+1	2017	2018	2019
I	a	b	c	...	d	-d	1	2	3
II	-a	-b	-c	...	-d	d	3	1	2

Упрощенная модель, где N - нечетное, α - четное, $\beta = 3$, для каждого $\frac{\alpha}{2}$ числа a есть $-a$.

1	2	3	4	5	6	7
a	b	-a	-b	1	2	3
-a	-b	a	b	3	1	2

Т.о. максимальное кол-во иррациональных чисел = 2016.

Ответ: 2016

Лист 1.

В-20

6	7	8	9	10	Σ
7	7	X	1	0	15

№6. Дана последовательность чисел S:

n, $n+1$, $n+2$, $n+3$

где $n > 100$

1. Из этих 4-х чисел всегда можно взять 3 последовательных N числа, их Σ_n равна:
$n + n+1 + n+2 = 3n+3 = 3(n+1)$ (назовем последовательность 3-х чисел $n, n+1$ и $n+2$ a)
То есть, является утроенным средним членом a. Очевидно, что $\Sigma_n \vdots 3$

2. В данной S можно взять 2 a, назовем их a_{1-3} и a_{2-4}

$$\left[\begin{array}{l} a_{1-3}: a_1 = n \quad a_2 = n+1 \quad a_3 = n+2 \\ a_{2-4}: a_1 = n+1 \quad a_2 = n+2 \quad a_3 = n+3 \end{array}\right.$$

Очевидно, что их средними членами a_2 могут быть 2 последовательных N числа. Одно из них обязательно будет четным.

Т.о. $\left.\begin{array}{l} \Sigma_n = 3a_2 \\ a_2 \vdots 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdots 2$

3. Если $\Sigma_n \vdots 2$, то существует такой делитель d, что $\Sigma_n \vdots d$ и $a_2 = 2 \cdot d$
Он очевидно равен $\frac{a_2}{2}$ и $d \geq 51$ ($\min a_2 = 102$)

Значит, существует как минимум 3 различных делителя Σ_n: 2, 3 и $d \geq$

$$\left[\begin{array}{ll} 2>1 & 2 \neq 3 \\ 3>1 & 3 \neq 51 \\ 51>1 & 2 \neq 51 \end{array}\right]$$

Из всего вышесказанного:

Всегда можно найти среди 4х последовательных чисел 3 последов. таких, что 2-й из них $\vdots 2$, тогда их сумма будет $\vdots 3$, $\vdots 2$ и $\vdots \frac{a}{2}$

ч. т. д.

№7. $b > a > 1$ $\Rightarrow \sqrt[m]{b} > \sqrt[m]{a}$, т.о. $\sqrt[2n]{b} - \sqrt[2n]{a} > 0$

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) > 0$$

1. Рассмотрим x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) = 2\cdot 2^n\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} - \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)$$

2) представим из x_n $\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$ как разность квадратов:

$$\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} - \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} + \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)$$

Тогда $x_n = 2^n\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} - \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} + \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)$

$x_{n+1} = 2\cdot 2^n\left(\sqrt[2\cdot 2^n]{b} - \sqrt[2\cdot 2^n]{a}\right)$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt[2\cdot 2^n]{b} + \sqrt[2\cdot 2^n]{a}}{2}$$

3) т.к. $b > 1 \Rightarrow \sqrt[m]{b} > 1$

$a > 1 \Rightarrow \sqrt[m]{a} > 1$

$\Downarrow$

$\sqrt[2\cdot 2^n]{b} + \sqrt[2\cdot 2^n]{a} > 2$,

$\Downarrow$

$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$

справедливо для любого n.

ч.т.д.

Пример: для $n = 1$

$x_n = 2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$

$x_{n+1} = 4\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right) = 2\cdot\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)$

$2\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) = 2\left(\sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}\right)\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}\right)$

$\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a} > 2$, т.к. $\sqrt[4]{b} > 1$ и $\sqrt[4]{a} > 1$

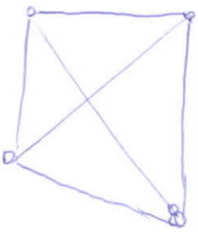
тогда $x_n > x_{n+1}$

$x_1 > x_2$

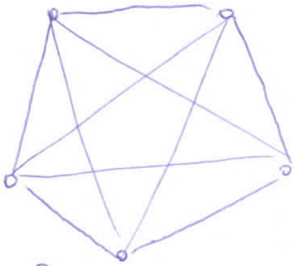
В-20

№9. Чтобы найти закономерность, рассмотрим несколько простейших n-угольников:

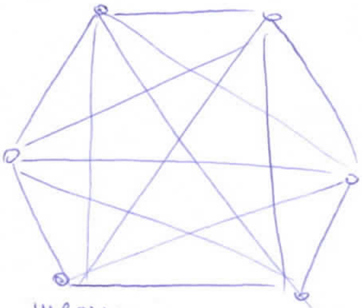
Все фигуры выпуклые



Четырехугольник



5-ти угольник

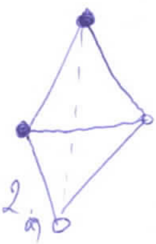


шестиугольник.

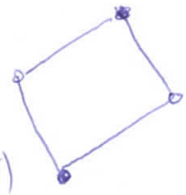
1. Очевидно, что из каждой вершины исходит $n-3$ диагонали ($n-1$ отрезков, соединяющих вершину с другими $n-1$ вершинами, 2 из которых совпадает со сторонами)
Диагонали 1 вершины делят n-угольник на $n-2$ треугольников, это наибольшее кол-во Δ-в, на которое можно разделить n-угольник, если диагонали не пересекаются (если будет проведена диагональ из другой вершины при всех $n-3$ из данной, они пересекутся)
Т.о. max кол-во Δ-ков, удовл. условию, в n-угольнике $= n-2$.

2. Рассмотрим 4х угольник (простейший пример):

1.

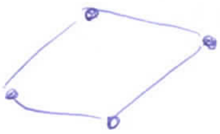


2. а)



б)

3.



4.

0. При полностью белых вершинах разноцветных диагоналей не будет
Если считать, что раскраска разных вершин в одном и том же количестве - разные раскраски, то:

1. если закрасить 1 вершину, диагональ будет разноцветной а 4х угольник поделен на 2 Δ-ка.
Так можно сделать 4 раза (4 вершины)

2. а) если закрасить 2 соседние вершины, диагонали из них будут разноцветными. Используя лишь 1 из них, вновь получаем 2 Δ-ка. Таких раскрасок тоже 4, хотя способов взять диагональ - 8.
б) если закрасить ~~противолежащие~~ противоположные вершины, не будет разноцветных диагоналей.

3. если закрасить 3 вершины, то одной из них будет противоположна 1 белая (ситуация аналогична 1 пункту, но противоположна), значит 1 разноцв. диагональ.
Таких раскрасок тоже 4

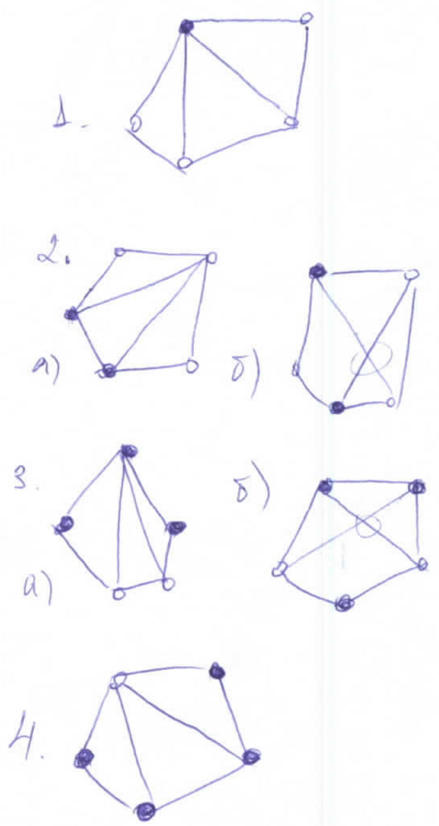
4. понятно, что при 4 закрашенных вершинах не будет разноцветных диагоналей.

Способов: $4 \cdot 3 = 12$
(раскрасок)

продолжение на

(3) Рассмотрим 5тиугольник (n ⋮̸ 2):

Отбросим варианты „раскрасить все" и „не красить ничего".



1. При раскраске 1 вершины две ее диагонали разноцветны, получается 3 Δ-ка, раскрасок <u>5</u> по кол-ву вершин

2. а) при раскраске 2 соседних вершин можно опустить 2 разноцветные диагонали в 1 вершину и получить 3 Δ-ка. Раскрасок (разных) тоже <u>5</u>

б) при раскраске 2 несоседних вершин любые 2 разноцв. диагонали пересекаются, что противоречит условию.

3. при раскраске 3х соседних вершин ситуация аналогична 2а) ситуации, но обратна по цвету. Опускаем 2 диагонали из средней вершины, 3 Δ-ка. <u>5 раскрасок</u>

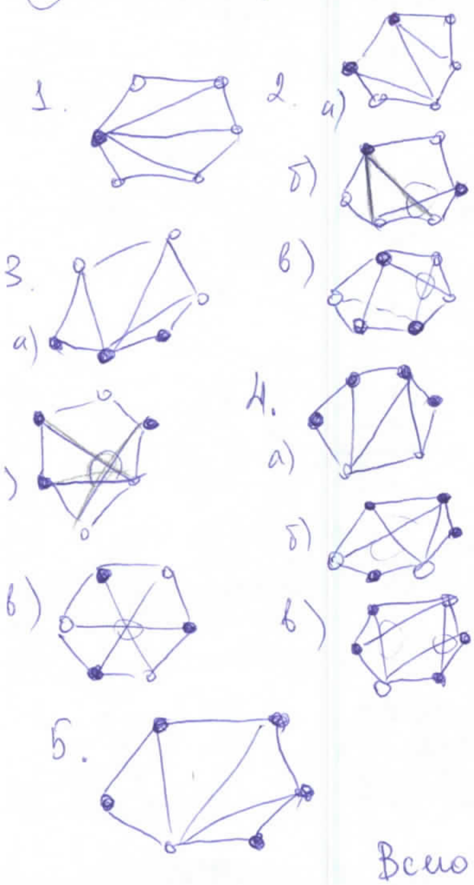
б) если 3 раскраш. вершины не соседние, то ситуация аналогична и обратна 2(б), пересечение диагоналей.

4. при раскраске 4х вершин ситуация аналогична 1 ситуации. <u>5 раскрасок</u>

Всего хороших раскрасок: $5 \cdot 4 = 20$.

(4) Рассмотрим шестиугольник (n ⋮ 2 и > 4) пример:

отбросим „раскрасить все и ничего".



1. при раскраске 1 вершины 3 ее диагонали разноцветны, 4 Δ-ка, <u>6</u> таких раскрасок.

2. а) вершины-соседи. соединяем 1 черную вершину с 1 белой, а 2ую черную — с 2мя белыми. (из средних белых) <u>6 раск.</u>

б) вершины закрашены через 1, в этом случае 3 разноцветные диагонали пересекаются.

в) закрашены противоположные вершины. диагонали пересекаются

3. а) вершины-соседи. соединяем 3 разноц диагонали со средней черной (или белой, без разницы) вершиной <u>6 раскрасок</u>

б) 2 вершины соседние, 1 отстоит. диагонали пересекаются.

в) вершины через одну: диагонали пересекаются.

4. аналогично с 2. <u>6 раскрасок</u>

5. аналогично с 1. 6 раскрасок.

Всего способов $6 \cdot 5 = 30$.

продолжение на листе 3

B-20.

(5.) Подведем итог и найдем общее.

0. Всегда кол-во разноцветных диагоналей $= n-3$ и равно кол-ву диагоналей 1 вершины.

1. Всего количество раскрашенных вершин варьируется от 0 до n, т.е. способов закрасить разное кол-во вершин $= n+1$. Из них 2 не имеют хороших раскрасок, когда i – кол-во черных вершин – равно 0 и n. Способов, где $i \neq 0$ и $i \neq n$: $n-1$.

2. В способах, где $i=1$ и $i=n-1$ (аналогичные способы) все диагонали идут из 1 точки, т.к. все диагонали этой вершины разноцветные. Получается $n-2$ $\triangle$-на. Таких раскрасок n в каждом из способов i

3. В n-угольниках, где $n \vdots 2$, 1 способ, не имеющий аналогии, и $\frac{n-4}{2}$ пар способов, имеющих аналогию с обратным цветом.

Для n-угольников, где $n \not\vdots 2$, есть еще $\frac{n-3}{2}$ пары аналогичных способов. (Всего таких способов $n-3$

В каждом из $n-3$ способов. $n-3$ варианта расставить вершины, из которых только в 1-м случае получаются хорошие раскраски. Таких раскрасок n в каждом из $n-3$ способов.

Т.о. существует $n-1$ способов раскрасить i вершин, чтобы получить хорошие раскраски, и в каждом из способов раскрасок n (по кол-ву вершин)

Т.о. общее кол-во хороших раскрасок равно $n(n-1)$.

Ответ: $n(n-1)$. или n^2-n

P.S. это можно также описать как $\frac{n!}{(n-2)!}$, где n – количество вершин, а $n-2$ – треугольники

№10. Известно, что последовательность квадратов 1, 4, 9...
представляет собой последовательность, где a_n равен сумме первых $\sqrt{a_n}$ нечетных чисел.

(1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7 и т.д.) Таким образом данная посл-сть $a_1, a_2 \ldots$
имеет следующую закономерность:

3 раза прибавляется 1 $(a_2 = a_1 + 1,\ a_3 = a_2 + 1\ \ a_4 = a_3 + 1)$

5 раз +2

7 раз + 3

9 раз + 4

11 раз + 5

и т.д.

Т.е. число n прибавляется $2n+1$ раз.

Пусть i – номер a_i, представляющий собой квадрат какого-либо числа, $i-1$ – предыдущий квадрат

Тогда каждое i число представлено в виде $a_{i-1} + \sqrt{i-1} \cdot 2 + a_{\sqrt{i}}$